Chapitre 1

Principes de modélisation

Dans ce chapitre, on propose une démarche graduelle de modélisation et on rappelle quelques grands principes permettant d'obtenir des modèles mathématiques pour une large classe de systèmes. Cette étape constitue un préalable à toute élaboration de loi de commande, cette dernière consistant le plus généralement en un algorithme mathématique adapté à une certaine représentation mathématique du système à commander. Nous nous proposons ici de donner des outils permettant d'obtenir une telle représentation.

Pour une étude plus détaillée concernant le sujet très vaste de la modélisation, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages comme [22, 8, 50].

1.1. Équations de bilan et lois phénoménologiques

Il existe en physique un certain nombre de *lois et principes fondamentaux* qui peuvent se formuler sous forme mathématique. Parmi ceux-ci, on peut citer les principes de conservation de la masse et de l'énergie (et plus généralement les principes de la thermodynamique), le principe fondamental de la dynamique et les lois de Newton en mécanique, les équations de Maxwell en électromagnétisme...

Nous reviendrons sur les expressions mathématiques de ces lois au paragraphe 1.2 mais on peut d'ores et déjà noter qu'elles résultent souvent d'un *bilan*.

1.1.1. Équations de bilan

Pour décrire l'état d'un système à un instant donné on peut utiliser deux types de grandeurs.

Définition 1.1.1

Une grandeur ou variable caractérisant l'état local d'un système à un instant donné est dite grandeur extensive *ou additive si elle est proportionnelle au volume $\Delta\Omega$ de l'élément local considéré.*

Exemples.

La masse M d'un élément est proportionnelle au volume de cet élément, de même l'énergie interne E, l'entropie H, la quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$ sont des variables extensives :

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Delta\Omega} \rho d\omega \,, \\ E &= \int_{\Delta\Omega} \rho e d\omega \,, \\ H &= \int_{\Delta\Omega} \rho h d\omega \,, \\ \overrightarrow{P} &= \int_{\Delta\Omega} \rho \overrightarrow{V} d\omega \,. \end{aligned}$$

Dans ces expressions, ρ désigne la masse volumique de l'élément considéré, e l'énergie interne spécifique (*i.e.* par unité de masse), h l'entropie spécifique, $\overrightarrow{V}$ le vecteur vitesse.

De manière duale, on introduit la notion suivante.

DÉFINITION 1.1.2
Une grandeur ou variable caractérisant l'état local d'un système à un instant donné est dite grandeur intensive *si sa valeur ne varie pas quand on modifie le volume $\Delta\Omega$ de l'élément considéré.*

Exemples.

La masse volumique ρ, l'énergie interne spécifique e, l'entropie spécifique h, la vitesse $\overrightarrow{V}$, la pression p d'un gaz, la température... sont des grandeurs intensives.

À présent, nous allons écrire la forme générale de l'équation de bilan qui exprime la conservation d'une grandeur extensive. Soit une grandeur scalaire extensive F qui se met sous la forme suivante dans le cas d'un volume fini Ω :

$$F = \int_{\Omega} \rho f d\omega \,.$$

Ici, f est la variable scalaire intensive associée à la grandeur extensive F, rapportée à l'unité de masse.

Si le volume Ω est limité par une surface supposée fixe $\partial\Omega$, de normale unitaire $\overrightarrow{n}$ dirigée vers l'extérieur, trois termes interviennent dans l'équation de bilan :

- un terme de variation de la grandeur F par unité de temps dans le volume Ω,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho f d\omega \,,$$

- un terme de flux de la grandeur F, qui caractérise l'apport ou la perte de la grandeur F au travers de la surface $\partial\Omega$,

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{J_F} \,.\, \overrightarrow{n} \, ds \,,$$

où $\overrightarrow{J_F}$ est le flux unitaire par unité de surface et de temps,

– un terme de production de la grandeur F,

$$\int_\Omega P_F \, d\omega \,,$$

où P_F est la vitesse de production de la grandeur F par unité de volume.

Ainsi, la formulation intégrale de l'équation de bilan s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \rho f \, d\omega \;=\; \int_\Omega P_F \, d\omega \;-\; \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{J_F} \,.\, \overrightarrow{n} \, ds \,. \tag{1.1}$$

Sous des hypothèses de régularité de ρ, f, $\overrightarrow{J_F}$, $\overrightarrow{n}$, on peut appliquer à (1.1) la formule d'Ostrogradsky et on obtient la formulation différentielle suivante de l'*équation de bilan* :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) \;=\; P_F \;-\; \mathrm{div}\overrightarrow{J_F} \,. \tag{1.2}$$

▷ Pour plus de détails, on pourra se référer à [1].

1.1.2. Lois phénoménologiques

Une fois fixées un certain nombre de variables (les « inconnues » du problème), les lois et principes fondamentaux de la physique précédents ne suffisent pas toujours à écrire un système d'équations comportant autant d'équations que d'inconnues. Des *lois phénoménologiques* ou de comportement, propres à chaque discipline, sont alors adjointes en vue de « fermer » le système d'équations (c'est-à-dire faire en sorte que le nombre d'équations coïncide avec le nombre d'inconnues).

On peut compléter un système par des équations d'approximation résultant du principe suivant.

PRINCIPE 1.1.3
Au voisinage d'un équilibre, un courant de grandeur extensive est proportionnel au gradient de la grandeur intensive conjuguée.

Le terme « conjugué » est à prendre au sens où moments et vitesses sont des variables conjuguées par rapport au Lagrangien, comme en mécanique analytique. De même, en thermodynamique, énergie et inverse de la température sont des variables conjuguées.

Exemples.